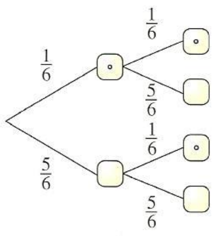
Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung und Erwartungswert



Zwei Freunde spielen folgendes Spiel: Zwei Würfel werden geworfen. Erscheint beim Würfeln kein Einser, so muss Max einen Euro zahlen. Für *jeden* „Einser“, muss Hans einen Euro bzw. für zwei Einser 2 Euro bezahlen.

Zwei Einser: __________ P(X = ___) =

Ein Einser: __________ P(X = ___) =

Kein Einser: __________ P(X = ___) =

Eine Zuordnung X, bei der verschiedenen Ergebnissen eines Experiments eine reelle Zahl, hier Euro, zugeordnet werden, nennt man **Zufallsgröße**. Wir erhalten für Max folgende **Wahrscheinlichkeitsverteilung** von X:

x_i			
$P(X= x_i)$			

Nun möchte Max wissen, ob er langfristig bei diesem Spiel gewinnen kann bzw. mit welchem Gewinn er rechnen darf. Dies nennt man den Erwartungswert. Diesen bestimmt man mit folgender Formel:

E(X) = ____.

Im Schnitt _______________________________________ auch wenn man die Chance hat 2 Euro zu gewinnen.

2. Beispiel:

Bei einem Würfelspiel gewinnt man einen Euro, wenn eine gerade Zahl erscheint und verliert einen Euro, wenn eine ungerade Zahl erscheint. Berechne den Erwartungswert.

In diesem Falle sagt der Mathematiker, dass das Spiel fair ist.

3. Beispiel

Peter und Susi spielen folgendes Spiel: Ein Würfel wird einmal geworfen. Pro Wurf setzt Peter 0,50 €. Erscheint eine 1 oder 2 gewinnt er 2 €. (Seinen Einsatz erhält er zurück!). Mit welchem Gewinn/Verlust ist langfristig zu rechnen?

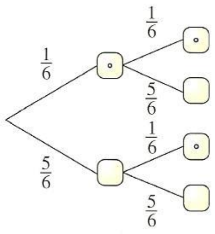
Wie müsste man das Spiel verändern, dass es sich um ein faires Spiel handelt?

Aufgabe 1 Hans und Max würfeln. Fällt eine Zahl größer als 2, muss Max einen Euro bezahlen und im anderen Falle erhält er 2 Euro. Berechne den Erwartungswert für Hans und interpretiere das Ergebnis.

Aufgabe 2: Ein Kasten enthält drei weiße und sieben rote Kugeln. Ein Spieler zieht ohne zurücklegen fünf Kugeln. Sind unter diesen fünf Kugeln genau 2 weiße, so gewinnt er 10 €, andernfalls muss er 5 € bezahlen. Bestimme den Erwartungswert.

Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung und Erwartungswert

Zwei Freunde spielen folgendes Spiel: Zwei Würfel werden geworfen. Erscheint beim Würfeln kein Einser, so muss Max einen Euro zahlen. Für *jeden* „Einser“, muss Hans einen Euro bzw. für zwei Einser 2 Euro bezahlen.



Zwei Einser: 2 Euro $P(X = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

Ein Einser: 1 Euro $P(X = 1) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{36}$

Kein Einser: - 1 Euro $P(X = -1) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$

Eine Zuordnung X, bei der verschiedenen Ergebnissen eines Experiments eine reelle Zahl, hier Euro, zugeordnet werden, nennt man **Zufallsgröße**. Wir erhalten für Max folgende **Wahrscheinlichkeitsverteilung** von X:

x_i	-1	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Nun möchte Max wissen, ob er langfristig bei diesem Spiel gewinnen kann bzw. mit welchem Gewinn er rechnen darf. Dies nennt man den Erwartungswert. Diesen bestimmt man mit folgender Formel:

$E(X) = -1 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} \approx -0{,}38$. Im Schnitt verliert man also 0,38 Euro, auch wenn man die Chance hat 2 Euro zu gewinnen.

2. Beispiel:

Bei einem Würfelspiel gewinnt man einen Euro, wenn eine gerade Zahl erscheint und verliert einen Euro, wenn eine ungerade Zahl erscheint. Klar ist, dass man langfristig bei diesem Spiel weder verliert noch gewinnt. Da die Chancen zu gewinnen und zu verlieren bei jeweils ½ liegen gilt:

Erwartungswert(x) = $1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$ In diesem Falle sagt der Mathematiker, dass das Spiel fair ist.

3. Beispiel

Peter und Susi spielen folgendes Spiel: Ein Würfel wird einmal geworfen. Pro Wurf setzt Peter 0,50 €. Erscheint eine 1 oder 2 gewinnt er 2 €. (Seinen Einsatz erhält er zurück!). Mit welchem Gewinn/Verlust ist langfristig zu rechnen?

Betrachten wir die Zufallsgröße X: $X(1) = X(2) = 2$ und $X(3) = X(4) = X(5) = X(6) = -0{,}5$.

Für die Wahrscheinlichkeiten gilt: $P(X=2) = 1/3$ und $P(X= -0{,}5) = 2/3$.

Für den Erwartungswert E(X) gilt dann: $E(X) = 2 \cdot P(X=2) + (-0{,}5) \cdot P(X= -0{,}5) = 2 \cdot 1/3 + (-0{,}5) \cdot 2/3 = 0{,}33$.

Langfristig ist also mit einem Gewinn von 0,33 € bei diesem Spiel zu erwarten.

Wie müsste man das Spiel verändern, dass es sich um ein faires Spiel handelt?

Aufgabe 1 Hans und Max würfeln. Fällt eine Zahl größer als 2 muss Max einen Euro bezahlen und im anderen Falle erhält er 2 Euro. Berechne den Erwartungswert für **Hans** und interpretiere das Ergebnis.

Aufgabe 2: Ein Kasten enthält drei weiße und sieben rote Kugeln. Ein Spieler zieht ohne zurücklegen fünf Kugeln. Sind unter diesen fünf Kugeln genau 2 weiße, so gewinnt er 10 €, andernfalls muss er 5 € bezahlen. Bestimme den Erwartungswert.

Lösungen:

-2	**1**
2/6	**4/6**

1) E(X) = (-2)· 2/6 +1· 4/6 = (-4/6) + 4/6 = 0 Langfristig ist das Spiel mathematisch fair.

2) Ergebnismenge: Wahrscheinlichkeit, dass von 10 Kugeln 5 Kugeln gezogen werden: $\binom{10}{5}$ = 252.

Ereignismenge: Wahrscheinlichkeit, dass von 3 weißen 2 gezogen werden: $\binom{3}{2}$ = 3 und die

Wahrscheinlichkeit, dass von 7 roten Kugeln dann 3 gezogen werden: $\binom{7}{3}$ = 35. Dies führt zu folgender

Rechnung: $\frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{7}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{3\cdot 35}{252} = \frac{105}{252} = \frac{5}{12}$.

Für den Erwartungswert gilt dann: E(x) = 10 · P(X=10) + (-5) · P(X= - 5) = 10 · $\frac{5}{12}$ + (-5) · $\frac{7}{12}$ = 1,25. Das Spiel lohnt sich für den Spieler.